

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ РАСЧЁТА LC – КОНТУРА

Федотов Ю.Б., Герасимов А.М.

ГОУВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева», г. Саранск

Аннотация: В статье приводится оценка погрешности некоторых формул численного решения интегральных уравнений.

Ключевые понятия: погрешность, метод Рунге-Кутты, LC- контур.

Введение

В задачах преобразовательной техники, в которых целесообразно применять интегральные уравнения, типичным является расчет почти реактивного многополюсника на длинном интервале. В настоящее время считается, что для проведения расчетов на интервале, длительностью T с заданной точностью ε_m , необходимо выбрать такой шаг h , чтобы погрешность на одном шаге ε_h была на несколько порядков меньше ε_m . Такой подход приводит к недопустимо большим затратам машинного времени. Поэтому для практического использования того или иного численного метода для анализа переходных режимов преобразовательных устройств желательна оценка его погрешности при расчете на интервале T .

При использовании интегральных уравнений погрешность имеет два источника:

- погрешность аппроксимации независимых источников их дискретами на сетке с шагом h ;
- погрешность от стыковки частей.

Оценка первой погрешности приводится в литературе по численным методам и здесь не рассматривается. Оценка погрешности от стыковки частей в общем случае является сложной задачей, однако при расчете реактивных цепей появляется возможность упрощений, позволяющих решить данную задачу.

Методы расчёта

Здесь приводится оценка погрешности некоторых формул численного решения интегральных уравнений для сравнения, формулы Рунге-Кутты четвертого порядка при расчете одного периода собственных частот чисто реактивного LC - контура.

Любой метод численного интегрирования приводит к рекуррентной формуле вида:

$$x_n + s = W \cdot x_n. \quad (1.1)$$

где

$$x_n = x_{(nh)}, \quad x_{n+s} = x_{(nh+sh)},$$

sh - полный шаг применяемого численного метода. Например, для формулы Симпсона $S=2$.

Один метод отличается от другого соответствующей матрицей W .

Скалярное произведение:

$$\begin{bmatrix} 1 & -8a \\ 8a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5a \\ -5a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ u_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_2 \\ u_2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -4a \\ 4a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4a \\ -4a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ u_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 16a \\ -16a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_1 \end{bmatrix},$$

$$x_{n+s}^t \cdot x_{n+s} = \|x_{n+s}\|^2 \quad (1.2)$$

является энергетической нормой вектора x_{n+s} . С учетом (П.1.1) имеем:

$$\|x_{n+s}\|^2 = x_n^t \cdot W^t \cdot W \cdot x_n. \quad (1.3)$$

Матрица $W^t \cdot W$ симметрическая, и поэтому допускает следующее представление:

$$W^t \cdot W = P^t \cdot \Lambda \cdot P$$

ортогональной матрицей P и диагональной вещественной матрицей Λ . Поэтому, вместо (1.3) можно записать:

$$\|x_{n+s}\|^2 = (P \cdot x_n)^t \cdot \Lambda (P \cdot x_n) = \tilde{x}^t \cdot \Lambda \cdot \tilde{x}_n = \sum_k \tilde{x}_{n,k}^2 \cdot \lambda_k.$$

где $\tilde{x}_n = P \cdot x_n$, а индекс k пробегает множество компонентов вектора x .

Энергетическая норма вектора x в точке t

$$\|x\|_n^2 = \|\tilde{x}\|_n^2 = \sum_k \tilde{x}_{n,k}^2.$$

С учетом этого изменение вычисляемой энергии на рассматриваемом шаге:

$$\|x\|_{n+s}^2 - \|x\|_n^2 = \sum_k (\lambda_k - 1) \cdot \tilde{x}_{n,k}^2. \quad (1.4)$$

Для чисто реактивных цепей энергия неизменна во времени, и поэтому дефект энергии, который дает формула численного интегрирования, может служить хорошей оценкой ее погрешности. Для хорошего метода, как видно из (1.4)

$$\lambda_k = 1$$

для всех k . Конечно это равенство не означает, что метод является точным; возможна еще фазовая или частотная погрешность. Оценивать погрешность метода дефектом энергии за один шаг

$$\delta\mathcal{E}_{(sh)} = \frac{\|x\|_{n+s}^2 - \|x\|_n^2}{\|x\|_n^2}$$

нельзя, поскольку $\delta\mathcal{E}$ зависит от величины шага h и любой сходящийся метод дает:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta\mathcal{E}_{(sh)} = 0$$

Более объективной является оценка метода дефектом энергии на фиксированном временном интервале, например, на периоде T .

$$\delta\mathcal{E}_{(T)} = \frac{\|x\|_T^2 - \|x\|_0^2}{\|x\|_0^2}. \quad (1.5)$$

Однако определять $\delta\mathcal{E}_{(T)}$ труднее, чем $\delta\mathcal{E}_{(sh)}$, поскольку необходимо проводить вычисления с матрицей

$$(W^t)^n \cdot W^n$$

которая, если матрица W имеет произвольный вид, не равна

$$(W^t \cdot W)^n.$$

Однако, при анализе LC - контура, матрица W имеет специальный вид, позволяющий получить в явной форме коэффициент растяжения вектора x за один шаг и его фазовый сдвиг. Это значительно упрощает задачу.

Учитывая вышесказанное, оценку и сравнение численных методов производится на

примере чисто реактивного LC - контура, схема которого приведена на рис. 1.2. Независимых источников в нем нет совсем. Ветви L и C рассматриваются как отдельные двух-полюсники и описываются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_{10} + \int_0^t u_1 \cdot dt \\ u_2 &= u_{20} + \int_0^t i_2 \cdot dt \end{aligned} \right\}. \quad (1.6)$$

Уравнение соединения ЛМП:

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= -i_1 = -i \\ u_2 &= u_1 = u \end{aligned} \right\}. \quad (1.7)$$

Уравнения (1.6) и (1.7) приводят к системе интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} i &= i_0 + \int_0^t u \cdot dt \\ u &= u_0 + \int_0^t i \cdot dt \end{aligned} \right\}. \quad (1.8)$$

Здесь переменные ЛМП являются нерешенными внешних полюсов и следовательно не нужно их вычислений. Обозначим:

$$x = \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix}.$$

Оценку погрешности начнем с формулы трапеций.

Уравнения (1.8) для формулы трапеций имеют вид:

$$i_{n+1} = i_n + \frac{h}{2} \cdot (u_n + u_{n+1}),$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} \cdot (i_n + i_{n+1}).$$

Это уравнение можно записать в виде:

$$x_{n+1} = W \cdot x_n,$$

где

$$W = \frac{4}{4+h} \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 - \frac{h}{4} & h \\ \hline -h & 1 - \frac{h}{4} \end{array} \right].$$

Матрица W является матрицей второго порядка, у которой два элемента, расположенные симметрично относительно главной диагонали равны по модулю и противоположны по знаку, а диагональные элементы равны. Такая матрица может быть представлена как произведение скалярного множителя r на матрицу поворота P ;

$$W = r \cdot P_{(\alpha)},$$

где

$$P_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Умножение матрицы W на вектор соответствует повороту вектора на некоторый угол α и растяжению его с некоторым коэффициентом r . В нашем случае, коэффициент растяжения

$$r(h) = \left(\frac{4-h^2}{4+h^2} \cdot \frac{4-h^2}{4+h^2} + \frac{4h}{4+h^2} \cdot \frac{4h}{4+h^2} \right)^{1/2} = 1.$$

так, что ошибки по энергии метод трапеций не имеет при любом шаге. А фазовый сдвиг на один шаг для формулы трапеций составляет:

$$\alpha(h) = \arctan \frac{4h}{4-h^2}.$$

Это соответствует изменению резонансной частоты LC - контура:

$$\square f_T = \frac{h - \arctan \frac{4h}{4-h^2}}{h}. \quad (1.9)$$

Теперь рассмотрим формулу Симпсона. Уравнения (П.1.8) при этом примут вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & -8a \\ 8a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5a \\ -5a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ u_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_2 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4a \\ 4a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4a \\ -4a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ u_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 16a \\ -16a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_1 \end{bmatrix},$$

где

$$a = h/12.$$

Эти уравнения можно записать в виде:

$$A \cdot x_2 = B \cdot x_0, \quad (1.10)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1-48a^2 & -12a \\ 12a & 1-48a^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1-48a^2 & 12a \\ -12a & 1-48a^2 \end{bmatrix},$$

$$x = (i, u)^t.$$

Здесь, также как и у формулы трапеций, матрицы A и B являются матрицами второго порядка, у которых два элемента, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны по модулю и противоположны по знаку, а диагональные элементы равны. Поэтому матрицы A и B можно записать:

$$A = r_A \cdot P(\alpha_A), \quad B = r_B \cdot P(\alpha_B). \quad A = r_A \cdot P(\alpha_A), \quad B = r_B \cdot P(\alpha_B).$$

Учитывая, что

$$A^{-1} = \frac{1}{r_A} \cdot P(-\alpha_A)$$

решение уравнения (П.1.10) примет вид:

$$X_2 = \frac{r_B}{r_A} \cdot P(\alpha_B - \alpha_A) \cdot X_0.$$

В рассматриваемом случае:

$$r_A^2 = r_B^2 = (12a)^2 + (1 - 48a^2)^2.$$

Поэтому

$$r_B / r_A = 1$$

и как и для формулы трапеций, ошибка по энергии у формулы Симпсона нет при любом шаге. Фазовый сдвиг вектора X за один шаг составляет:

$$\alpha_c = \alpha_B - \alpha_A = 2 \cdot \arctg \frac{3h}{3 - h^2},$$

А изменение резонансной частоты:

$$\Delta fc = \frac{h - \arctg \frac{3h}{3 - h^2}}{h}. \quad (1.11)$$

В заключение, для сравнения квадратурных формул, рассматривается метод Рунге-Кутты четвертого порядка, который описывается системой следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 + K_4), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 + K_4), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$K_1 = f(t_n, x_n),$$

$$K_2 = f(t_n + 0,5h, x + 0,5 \cdot h \cdot K_1),$$

$$K_3 = f(t_n + 0,5 \cdot h, x + 0,5 \cdot h \cdot K_2),$$

$$K_4 = f(t_n + h, x + h \cdot K_3).$$

Для LC - контура, изображенного на рис. 1.1:

$$f(t, x) = A \cdot x$$

где

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

так, что

$$K_1 = A \cdot x,$$

$$K_2 = (A + 0,5 \cdot h \cdot A^2) \cdot x,$$

$$K_3 = (A + 0,5 \cdot h \cdot A^2 + 0,25 \cdot h^2 \cdot A^3) \cdot x,$$

$$K_4 = (A + 0,5 \cdot h^2 \cdot A^3 + h \cdot A^2 + 0,25 \cdot h^3 \cdot A^4) \cdot x$$

Подставляя K_1, K_2, K_3, K_4 в (П.1.12) получим:

$$x_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 - \frac{1}{2} \cdot h^2 - \frac{1}{24} \cdot h^4 & h - \frac{1}{6} \cdot h^3 \\ \hline -h + \frac{1}{6} \cdot h^3 & 1 - \frac{1}{2} \cdot h^2 + \frac{1}{24} \cdot h^4 \end{array} \right] \cdot x_n. \quad (1.13)$$

Отсюда, коэффициент растяжения для метода Рунге-Кутты:

$$r_{P.K.} = \left[\left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} \right)^2 + \left(h - \frac{h^3}{6} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.14)$$

Фазовый сдвиг вектора X за один шаг:

$$\alpha_{P.K.} = \arctg \frac{h - \frac{h^3}{6}}{1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}}.$$

А изменение резонансной частоты LC-контура при использовании метода Рунге-Кутты:

$$\Delta f_{P.K.} = h - \arctg \frac{1 - \frac{h}{6}}{1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}}. \quad \Delta f_{P.K.} = h - \arctg \frac{1 - \frac{h}{6}}{1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}}. \quad (1.15)$$

Заключение

Зависимости смещения резонансной частоты LC - контура от величины шага для рассмотренных методов приведены на рис. П.1.2. Полученные результаты в общем случае не могут служить обоснованием к выбору того или иного шага при расчете сложной цепи. Однако и они позволяют сделать следующие выводы:

1. Энергетическая погрешность рассмотренных квадратурных формул равна нулю. Они точно перемещают полюсы системы дифференциальных уравнений, лежащие на мнимой оси, на полюсы системы разностных уравнений, лежащие на единичной окружности.

2. Если разброс собственных частот линейных многополюсников невелик, то целесообразней применять квадратурные формулы низкого порядка, поскольку допустимый шаг формулы высокого по рядка больше, чем это необходимо по условиям вывода результатов и обычной частоте переключений.

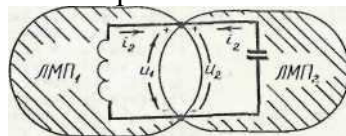


Рис. 1.1 Реактивный LC-контур.

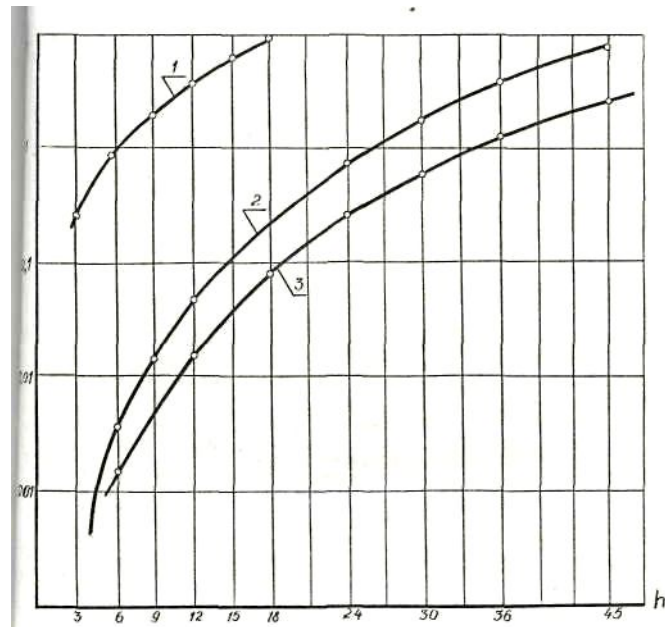


Рис. 1.2 Зависимости смещения резонансной частоты LC - контура от величины шага h - для формулы трапеций; 2 - для формулы Симпсона; 3 - метода Рунге - Кутты.

Сведения об авторах

Федотов Юрий Борисович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой промышленной электроники Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева, тел. +7(834-2) 490608, e-mail: fedotovyb@mail.ru

Герасимов Александр Михайлович, аспирант кафедры «Промышленная электроника» тел. 89876950596, e-mail: alex_grsmv@mail.ru