УДК 621.374

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Долгов А. И., Кладовой И. И.
Ростовский военный институт ракетных войск
E-mail: rvirv@mail.ru

Аннотация. Обосновывается применимое при построении компьютерно-реализованных экспертных систем соотношение, названное формулой Долгова, для определения интегральных апостериорных условных вероятностей комбинаций в общем случае неполной (в частном полной) группы независимых гипотез, которые могут быть как совместными, так и несовместными. Заданными исходными данными являются априорные статистические вероятности гипотез и условные априорные статистические вероятности независимых совместных свидетельств, подтверждающих рассматриваемые гипотезы, а также для каждого из накапливаемых свидетельств апостериорная вероятность, характеризующая степень доверия к нему (в том числе достоверность или невозможность). Частным случаем формулы Долгова при несовместных гипотезах и одном достоверном свидетельстве является формула Байеса.

Ключевые слова: условная вероятность, полная группа гипотез, полная группа несовместных гипотез, аддитивный учет комбинаций, мультипликативный учет комбинаций.

ВВЕДЕНИЕ

При построении экспертных систем широко используется формула Байеса ([1], с. 50), которая считается (см., например, [2], с. 162) применимой к оценкам не только вероятностей (объективных, статистических и субъективных), но и степени доверия (и принадлежности) к гипотезам и свидетельствам, а также уровней правдоподобия (и достоверности) гипотез и свидетельств или уверенности в них. Далее будут рассматриваться соотношения, для статистических вероятностей (отражающих объективные вероятности с той или иной точностью, обусловленной объёмом набранной статистики), которые для гипотез и свидетельств могут иметь трактовку также и в отношении уровней доверия, принадлежности, правдоподобия, достоверности и уверенности. В публикуемых материалах осуществляется обоснование предлагаемой формулы для определения интегральных апостериорных условных вероятностей независимых гипотез, которые могут быть как совместными, так и несовместными, при заданных исходных данных об априорных условных статистических вероятностях гипотез и учитываемых подтверждающих рассматриваемые гипотезы независимых свидетельств, каждое из которых может характеризоваться апостериорными сведениями о вероятности, в том числе о достоверности либо невозможности того или иного события.

Прежде чем приступить к обоснованию предлагаемой формулы целесообразно проанализировать возможности существующих методов определения условных вероятностей и изложить теоретические положения, придающие обоснованию математическую корректность.

1 АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Будем исходить из того, что свидетельство о событии E характеризуется вероятностью $\mathrm{P(E)}$, при этом $\mathrm{P(E)} = 1$ и $\mathrm{P(неE)} = 1 - \mathrm{P(E)} = 0$ свидетельствуют о достоверности события E (далее свидетельство E) и невозможности противоположного события $\mathrm{неE}$ (свидетельства неE), в то время как $P(E)=0$ и $P(\text{не}E) = 1 - P(E) = 1$ свидетельствуют о достоверности события неE и невозможности события E .

При использовании формулы Байеса определяются условные вероятности $P(H_i/E)$ для полной группы несовместных гипотез H_i при одном свидетельстве E , при этом не учитывается накапливание свидетельств, что является весьма жёсткими ограничениями, которые в большинстве случаев не соответствует решаемым прикладным задачам.

Известна формула Нейлора ([3], с. 235), предложенная для учёта накапливаемых свидетельств, “основой” которой, как это записано в цитируемом источнике, является “теорема Байеса, утверждающая:

P(H:E)=P(E:H)P(H)/(P(E:H)P(H)+P(E:неH) P(неH))”.

В приведенных символических обозначениях P(H:E) – условная вероятность гипотезы H при условии, что имеет место свидетельство E, а наклонной чертой представлен символ деления вещественных чисел. При дальнейшем изложении для обозначения гипотез и свидетельств также будут использоваться символы H и E, при этом условная вероятность гипотезы H при условии, что имеет место свидетельство E, будет обозначаться, как в учебнике [1] Вентцель в виде P(H/E), а деление представляться горизонтальной чертой.

При таких обозначениях формула Нейлора может быть записана в виде, похожем на формулу Байеса:

$$P(H_i/E) = \frac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{P(E/H_i)\,P(H_i) + P(E/\text{не}H_i)\,P(\text{не}H_i)},$$

причём, вычислив $P(H_i/E)$ для учитываемого свидетельства E, как сказано в [3] (с. 236), “мы забываем об этом, за исключением того, что априорная вероятность P(H) заменяется на P(H:E). Затем продолжается выполнение программы, но с учётом постоянной коррекции значения P(H) по мере поступления новой информации” (очередных свидетельств).

Следует, однако, констатировать, что формула Нейлора [3] не эквивалентна формуле

$$P(H_i/E) = \frac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E/H_k)\,P(H_k)},$$

доказываемой в теореме Байеса.

В самом деле, формула Нейлора, с учётом того, что при её построении (как и в теореме Байеса) рассматривается полная группа несовместных гипотез, приводится к виду

$$P(H_i/E) = \frac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{P(E/H_i)\,P(H_i) + P(E/\text{не}H_i)\,(1 - P(H_i))} =$$

$$= \frac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{P(E/H_i)\,P(H_i) + P(E/\text{не}H_i)\sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n} P(H_k)},$$

а формула Байеса к аналогичному виду

$$P(H_i/E) = \frac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{P(E/H_i)\,P(H_i) + \sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n} P(E/H_k)\,P(H_k)}.$$

Из сравнения видно, что слагаемые $\sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n} P(E/H_k)\,P(H_k)$ в знаменателе формулы Байеса умножаются на различные значения $P(E/H_k)$, каждое из которых связано с k-й гипотезой, а слагаемые $P(E/\text{не}H_i)\sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n} P(H_i)$ в знаменателе формулы Нейлора умножаются на одинаковые значения $P(E/\text{не}H_i)$, каждое из которых связано с одной и той же i-й гипотезой. Кроме того, в случае формулы Байеса

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i/E) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E/H_{12})\,P(H_k)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P(E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E/H_k)\,P(H_k)} = 1,$$

в то время как в случае формулы Нейлора

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i/E) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{P(E/H_i)\,P(H_i) + P(E/\text{не}H_i)\sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq i)}}^{n} P(H_k)} \neq 1.$$

Не будем обсуждать корректность или некорректность таких различий.

Накапливание свидетельств может быть учтено иначе, а именно с использованием формулы, приведенной в публикации ([2], с. 179) Змитровича, соответственно которой произведение $P(H_i)\,P(E_1/H_k)$ априорных вероятностей умножается на условную априорную вероятность $P(E_2/H_i \wedge E_1)$:

$$P(H_i/E_1 \wedge E_2) = \frac{P(H_i)\,P(E_1/H_i)P(E_2/H_i \wedge E_1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)\,P(E_1/H_k)P(E_2/H_k \wedge E_1)}.$$

Однако, следует отметить, что такая формула, записываемая для множества свидетельств, как и формула Нейлора, не приводится к формуле Байеса. Необходимо также добавить, что все три рассмотренные формулы определяют условные вероятности в предположении о несовместности гипотез, образующих полную группу.

Представляет научный и практический интерес построить по аналогии с формулой Байеса соотношение для расчёта условных вероятностей независимых гипотез, которые могут быть как совместными, так и несовместными, при заданных вероятностях некоторого множества независимых совместных свидетельств.

При построении формулы будет использован ***принцип сохранения соотношений вероятностей,*** представляющий объективную основу теории вероятностей, однако не нашедший внятного отражения в современной учебной и научно-технической литературе.

2 ПРИНЦИП СОХРАНЕНИЯ СООТНОШЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В основу излагаемых далее утверждений положим известное ([1], с. 16) определение вероятности: “Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности, очевидно, нужно с каждым событием связать определённое число, которое тем больше, чем более возможное событие. Такое число называется вероятностью события”.

Судя по приведенному определению, понятие вероятностей введено для того, чтобы “количественно сравнивать между собой события по степени их возможности” [1], то есть для выражения соотношений степеней возможности различных событий, а не ради измерения их абсолютных значений.

При совместной обработке вероятностей той или иной группы событий не должны нарушаться выражаемые ими соотношения степеней возможности событий, характеризуемые соотношениями исходных статистических вероятностей, что и отражает принцип сохранения соотношений вероятностей, перед формулированием которого надо определиться с вспомогательными понятиями.

Исходные статистические вероятности – числа, характеризующие “степень возможности” [1] входящих в генеральную совокупность событий, либо комбинаций событий (те и другие могут быть как совместными, так и несовместными).

Любая рассматриваемая ***группа событий*** (подгруппой которой может оказаться и полная в теоретико-вероятностном смысле группа) ***выбирается*** из генеральной совокупности событий (характеризуемых исходными статистическими вероятностями) ***субъективно***.

Далее для генеральной совокупности событий, включающей полные множества рассматриваемых событий-гипотез H_i (i=1,…,n), а также событий-свидетельств E_j и свидетельств неE_j (j=1,…,m), рассматриваются исходные статистические вероятности $P(H_i)$, $P(E/H_i)$ и $P(\text{не}E/H_i)$, полученные в результате набора статистики.

Нормирование вероятностей событий ***относительно*** любой выбираемой (рассматриваемой) их ***группы*** заключается в умножении каждой из ненормированных вероятностей P_k (k=1,…,K) событий, входящих в состав группы, на нормировочный коэффициент q, приводящий сумму, выражающую интегральное значение соответствующих нормированных вероятностей qP_k, к величине, равной 1, то есть к $\sum_{k=1}^{K} qP_k = 1$.

Из приведенного определения следует, что $q = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{K} P_k}$, и нормированная исходная вероятность P_k (как число) принимает значение $qP_k = \dfrac{P_k}{\sum\limits_{k=1}^{K} P_k}$, при этом, что существенно важно, соотношения исходных вероятностей (как степеней возможности) различных событий сохраняются неизменными.

<u>Принцип сохранения соотношений вероятностей</u>: корректная обработка статистических вероятностей субъективно выбираемой группы событий и(или) их комбинаций осуществима лишь при условии нормирования рассматриваемых вероятностей относительно данной группы с сохранением соотношения, равного соотношению соответствующих им исходных статистических вероятностей.

При нарушении сформулированного принципа искажаются сведения о “степени … возможности” [1] рассматриваемых событий и их комбинаций, и получаемые на основе искажённых сведений результаты и принимаемые решения оказываются не адекватными реальным статистическим данным.

Применение принципа проиллюстрируем на примере, использующем формулу Байеса и её следствие

$$P(H_i\ /\ \text{не}E) = \frac{P(\text{не}E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(\text{не}E/H_k)\,P(H_k)},$$

для определения математического ожидания апостериорной условной вероятности гипотезы H_i при известной вероятности $P(E)$ свидетельства E и соответствующей вероятности $P(\text{не}E) = 1 - P(E)$ свидетельства неE.

Попытку получения математического ожидания в виде суммы произведений с непосредственным использованием формулы Байса и её следствия, то есть в соответствии с соотношением

$$P(E)\ P(H_i\ /\ E) + (1 - P(E))\,P(H_i\ /\ \text{не}E) =$$

$$= P(E)\frac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E/H_k)\,P(H_k)} + (1 - P(E))\frac{P(\text{не}E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(\text{не}E/H_k)\,P(H_k)}\quad,$$

несмотря на то, что слагаемые искомой суммы произведений соответствуют несовместным комбинациям событий (а, согласно теории ([1], с. 33), "вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий"), следует признать некорректной.

Проблема в том, что в формуле Байса и её следствии апостериорные условные вероятности $P(H_i/E)$ и $P(H_i/\text{не}E)$ представляют собой произведения исходных статистических вероятностей $P(E/H_i)\,P(H_i)$ и $P(\text{не}E/H_i)\,P(H_i)$, которые являются нормированными относительно полных групп разных комбинаций событий.

В самом деле, апостериорные условные вероятности $P(H_i/E)$ при достоверном событии E являются произведениями $P(E/H_i)\,P(H_i)$ исходных статистических априорных условных вероятностей, нормированных относительно полной группы несовместных комбинаций $H_i \cdot E$ (i=1,…,n) зависимых гипотез H_i и свидетельств E:

$$\sum_{j=1}^{n} P(H_i\ /\ E) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E/H_k)\,P(H_k)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P(E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E/H_k)\,P(H_k)} = 1,$$

в то время как апостериорные условные вероятности $P(H_i\ /\ \text{не}E)$ являются произведениями $P(\text{не}E/H_i)\,P(H_i)$ исходных статистических априорных условных вероятностей, нормированных относительно полной группы несовместных комбинаций $H_i \cdot \text{не}E$ (i=1,…,n) зависимых гипотез H_i и свидетельств $\text{не}E$:

$$\sum_{j=1}^{n} P(H_i/\text{не}E) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(\text{не}E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(\text{не}E/H_k)\,P(H_k)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P(\text{не}E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(\text{не}E/H_k)\,P(H_k)} = 1.$$

Следует обратить внимание на то, что отношение произведений исходных статистических априорных условных вероятностей $P(E/H_i)\,P(H_i)$ и $P(\text{не}E/H_i)\,P(H_i)$, нормированных соответственно относительно полной группы несовместных комбинаций $H_i \cdot E$ и полной группы несовместных комбинаций $H_i \cdot неE$, принимающее значение $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} P(E/H_k)\,P(H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(неE/H_k)\,P(H_k)}$, оказывается не равным отношению произведений исходных вероятностей.

Для корректного суммирования необходимо произвести общее для произведений исходных статистических вероятностей $P(E/H_i)\,P(H_i)$ и $P(неE/H_i)\,P(H_i)$ нормирование, образовав новую объединяющую группу комбинаций событий, включающую как комбинации $H_i \cdot E$, так и $H_i \cdot неE$. Для исходных статистических вероятностей новой группы комбинаций общий нормировочный коэффициент равен

$$q = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} [P(E/H_k)\,P(H_k) + P(неE/H_k)\,P(H_k)]},$$

и, следовательно, в искомой сумме произведений следует индивидуальные нормировочные коэффициенты заменить на один общий:

$$P(E)\cdot P(H_i/E) + (1 - P(E))\cdot P(H_i/неE) =$$
$$= \frac{P(E)\,P(E/H_i)\,P(H_i) + (1 - P(E))\,P(неE/H_i)\,P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} \max\,[P(E/H_k)\,P(H_k), P(неE/H_k)\,P(H_k)]}.$$

При определении значения коэффициента нормирования учтена та особенность что он не должен быть зависимым от изменяемых значений $P(E)$ и $(1 - P(E))$, а величина $P(E)\,P(E/H_i)\,P(H_i) + (1 - P(E))\,P(неE/H_i)\,P(H_i)$ каждой суммы, указанной в числителе, не может превысить величины большего из слагаемых, включающих взаимозависимые множители $P(E)$ и $(1 - P(E))$, сумма которых равна 1.

В результате использования общего нормировочного коэффициента искомое математическое ожидание определено корректно, так как в соответствии с принципом сохранения соотношений вероятностей, обработке подвергнуты заново нормированные вероятности $q \cdot P(E/H_i)\,P(H_i)$ и $q \cdot P(неE/H_i)\,P(H_i)$, соотношение которых равно соотношению исходных статистических вероятностей $P(E/H_i)\,P(H_i)$ и $P(неE/H_i)\,P(H_i)$.

3 ФОРМУЛА ИНТЕГРАЛЬНОЙ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Среди других математических наук теория вероятностей выделяется весьма большим количеством очень строгих канонов, отступление от каждого из которых карается некорректностью получаемых результатов. Строгость и многообразие канонов порождает мифы, парализующие творческие подходы к допустимым вероятностным преобразованиям.

Разработке формулы интегральной условной вероятности препятствуют три довольно распространённых мифа, относящихся к применимости формулы Байеса:

1) формула применима для гипотез только и лишь только при одном свидетельстве;

2) формула применима для гипотез, которые могут быть только и лишь только несовместными;

3) формула применима для гипотез, если они образуют только и лишь только полную группу.

Мифы отражают правду, но не всю правду, касающуюся слов “только и лишь только”.

Питательную среду для таких мифов поддерживают действующие учебники, в которых обходятся вопросы вычисления условной вероятности гипотез при накапливаемых свидетельствах, определения условной вероятности совместных событий и применимости формулы Байеса для неполной группы гипотез.

Два первых приведенных мифа отвергаются с позиций иерархического подхода к описанию структуры гипотез и свидетельств.

В качестве примера рассмотрим полную группу несовместных гипотез H_i (i=1,…,n) с одним сложным свидетельством E, представляющим сумму $E_1 + ... + E_m$ простых свидетельств.

Если в традиционной формуле Байеса выразить сложное свидетельство через простые, то

$$P(H_i / E) = \frac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E/H_k)\,P(H_k)} = \frac{P(E_1 + ... + E_m/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E_1 + ... + E_m/H_k)\,P(H_k)},$$

и тем самым, развеивается первый миф, так как есть полное основание утверждать, что формула применима не только для одного свидетельства, но и для определения интегральных вероятностей гипотез H_i при накапливании множества свидетельств.

Второй из приведенных мифов о том, что формула Байеса применима для гипотез, которые могут быть только и лишь только несовместными, легко развеивается если каждую из них признать сложной гипотезой, образованной комбинацией совместных гипотез.

В качестве подтверждающего примера рассмотрим полную группу, включающую четыре сложные несовместные гипотезы $H_1 = G_1 \cdot G_2$, $H_2 = G_1 \cdot \text{не}G_2$, $H_3 = \text{не}G_1 \cdot G_2$ и $H_4 = \text{не}G_1 \cdot \text{не}G_2$, представляющие всевозможные допустимые произведения совместных простых гипотез G_1, G_2 и их отрицаний.

Выразив в числителе (можно это сделать и в знаменателе) формулы Байеса сложную гипотезу через простые, например, при i=1 получаем соотношение

$$P(H_1 / E) = \frac{P(E/H_1)\,P(H_1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E/H_k)\,P(H_k)} = \frac{P(E/G_1 \cdot G_2)\,P(G_1 \cdot G_2)}{\sum\limits_{k=1}^{4} P(E/H_k)\,P(H_k)},$$

устраняющее сомнение, в том, что это формула применима для совместных гипотез.

Третий миф о том, что формула Байеса применима для гипотез, если они образуют только и лишь только полную группу развеивается приводимым доказательством, оформленным в виде несложной теоремы.

<u>Теорема</u> (о применимости формулы Байеса к неполной группе гипотез): соотношение апостериорных условных вероятностей в любой подгруппе учитываемых гипотез полной группы при использовании формулы Байеса сохраняется равным соотношению апостериорных условных вероятностей гипотез полной группы.

<u>Дано</u>:

полная группа гипотез $H_1, \ldots, H_i, \ldots, H_n$,

при $m \le n$, $i1 \le m$ и $i2 \le m$ отношение $\dfrac{P(H_{i1}/E)}{P(H_{i2}/E)} = R$, где $P(H_{i1} / E)$ и $P(H_{i2}/E)$ – апостериорные вероятности, вычисляемые по формуле Байеса для полной группы несовместных гипотез, то есть

$$P(H_{i1}/E) = \frac{P(E/H_{i1})\,P(H_{i1})}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E/H_i)P(H_i)} \quad \text{и} \quad P(H_{i2}/E) = \frac{P(E/H_{i2})\,P(H_{i2})}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(E/H_i)\,P(H_i)}.$$

(i1≤m) (i2≤m)

<u>Требуется</u> доказать, что для апостериорных вероятностей, вычисляемых по формуле Байеса для неполной группы учитываемых несовместных гипотез в виде подгруппы

$H_1,\dots,H_i,\dots,H_m$ полной группы, т.е. при $P(H_{i1}/E) = \dfrac{P(E/H_{i1})\,P(H_{i1})}{\sum\limits_{\substack{k=1\\(i1\le m)}}^{m} P(E/H_k)\,P(H_k)}$ и

$P(H_{i2}/E) = \dfrac{P(E/H_{i2})\,P(H_{i2})}{\sum\limits_{\substack{k=1\\(i2\le m)}}^{m} P(E/H_k)\,P(H_k)}$. отношение $\dfrac{P(H_{i1}/E)}{P(H_{i2}/E)} = R$.

<u>Доказательство.</u>

Для полной группы гипотез

$$R = \frac{P(H_{i1}\ /\ E)}{P(H_{i2}\ /\ E)} = \frac{\dfrac{P(E/H_{i1})\,P(H_{i1})}{\sum\limits_{\substack{k=1\\(i1\le m)}}^{n} P(E/H_i)\,P(H_i)}}{\dfrac{P(E/H_{i2})\,P(H_2)}{\sum\limits_{\substack{k=1\\(i2\le m)}}^{n} P(E/H_i)\,P(H_i)}} = \frac{P(E/H_{i1})\,P(H_{i1})}{P(E/H_{i2})\,P(H_2)}.$$

Аналогично для подгруппы учитываемых гипотез полной группы

$$\frac{P(H_{i1}/E)}{P(H_{i2}/E)} = \frac{\dfrac{P(E/H_{i1})\,P(H_{i1})}{\sum\limits_{\substack{k=1\\(i1\le m)}}^{m} P(E/H_i)\,P(H_i)}}{\dfrac{P(E/H_{i2})\,P(H_2)}{\sum\limits_{\substack{k=1\\(i2\le m)}}^{m} P(E/H_i)\,P(H_i)}} = \frac{P(E/H_{i1})\,P(H_{12})}{P(E/H_{i2})\,P(H_2)} = R\,,$$

что и требовалось доказать.

Следует обратить внимание на то, что при определении условной вероятности гипотез неполной группы (при m<n) в соответствии с соотношением $P(H_i/E) = \dfrac{P(E/H_i)\,P(H_i)}{\sum\limits_{\substack{k=1\\(i\le k)}}^{m} P(E/H_k)\,P(H_k)}$, при неполноте группы учитываемых гипотез $(\sum\limits_{i=1}^{m} P(H_i) < 1)$, имеет место $\sum\limits_{i=1}^{m} P(H_{i1}/E) = 1$, что объясняется только и лишь только фактом нового нормирования относительно подгруппы учитываемых гипотез.

Таким образом, можно определять требуемые для решения прикладной задачи соотношения апостериорных условных вероятностей, не зная как априорные условные вероятности не учитываемых гипотез, так и априорные условные вероятности свидетельства при этих гипотезах.

Если же условные вероятности не учитываемых гипотез, и свидетельств при этих гипотезах известны, то легко прийти от соотношений $P(H_{i1}/E)=\dfrac{P(E/H_{i1})\,P(H_{i1})}{\sum\limits_{k=1}^{m} P(E/H_k)\,P(H_k)}$ и
(i1≤m)

$P(H_{i2}/E)=\dfrac{P(E/H_{i2})\,P(H_{i2})}{\sum\limits_{k=1}^{m} P(E/H_k)\,P(H_k)}$ к соотношениям, определяющим значения условных вероят-
(i2≤m)

ностей по формулам

$$P(H_{i1}/E)=\frac{P(E/H_{i1})\,P(H_{i1})}{\sum\limits_{k=1}^{m} P(E/H_k)\,P(H_k)+\sum\limits_{k=1}^{n-m+1} P(E/H_k)\,P(H_k)},$$

(i1≤m)

$$P(H_{i2}/E)=\frac{P(E/H_{i2})\,P(H_{i2})}{\sum\limits_{k=1}^{m} P(E/H_k)\,P(H_k)+\sum\limits_{k=1}^{n-m+1} P(E/H_k)\,P(H_k)},$$

(i2≤m)

предусматривающим нормирование относительно полной группы гипотез, при этом частный случай, когда учитываемыми являются все гипотезы полной группы, оказывается соответствующим теореме Байеса.

Таким образом, применимость формулы Байеса к неполной группе гипотез также не должна вызывать сомнений.

С учётом сказанного, рассмотрим задачу определения интегральных условных вероятностей в следующей постановке.

<u>Дано:</u>

априорные вероятности $P(H_i)$ группы рассматриваемых независимых гипотез H_i (i=0,…,n), g-я комбинация которых характеризуются двоичными признаками $б_{gi}$ $(g=1,...,g_k)$, где g_k – количество несовместных комбинаций гипотез, причём $б_{gi}=1$, если i-я гипотеза входит в g-ю комбинацию и $б_{gi}=0$, если не входит;

априорные условные статистические вероятности $P(E_j/H_i)$ и $P(неE_j/H_i)$ независимых совместных свидетельств E_j (j=1,…,m) и свидетельств $неE_j$, полученных при подтверждении гипотезы H_i в процессе набора статистики;

апостериорные вероятности $P(E_j)$ и $P(неE_j)$, характеризующие степень доверия свидетельствам E_j и свидетельствам $неE_j$, накапливание которых характеризуется двоичным признаком:

$$в_j=\begin{cases}1, \text{если сведения о свидетельстве } E_j \ (неE_j) \text{ поступили},\\ 0, \text{если сведения о свидетельстве } E_j \ (неE_j) \text{ не поступили}.\end{cases}$$

Требуется определить интегральные апостериорные условные вероятности комбинаций рассматриваемых гипотез при накапливаемых свидетельствах.

При построении формулы будем ориентироваться на прикладной пример вероятностной оценки интегральной гипотетической опасности, определяемой на основе множества независимых гипотез H_i (i=1,…,n), удостоверяющих нарастание опасности на основе учёта вероятностей $P(E_j)$ накапливаемых независимых свидетельств E_j (j=1,…,m).

Для решения поставленной задачи требуется выбрать конкретный способ определения интегральных вероятностей.

Широкое распространение, в частности при построении байесовских сетей доверия [4], получили способы определения интегральных апостериорных вероятностей гипотез H_i с мультипликативным учётом накапливаемых свидетельств E_j в соответствии с соотношением (на примере трёх свидетельств)

$$P(H_i/E_1 \cdot E_2 \cdot E_3) = \frac{P(H_i)\,P(E_1/H_i)\,P(E_2/H_i \cdot E_1)\,P(E_3/H_i \cdot E_1 \cdot E_2)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)\,P(E_1/H_k)P(E_2/H_k \cdot E_1)P(E_3/H_i \cdot E_1 \cdot E_2)}.$$

При мультипликативном учёте свидетельств интегральное значение вероятности одной гипотезы, записанное в числителе, получаемое для пересечения свидетельств, с поступлением нового свидетельства не увеличивается, а уменьшается. При этом, как можно убедиться методом численных расчётов, значения апостериорных вероятностей $P(H_i /E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 ...)$ ввиду конкретно использованного нормирования, для одних гипотез могут увеличиваться, а для других уменьшаться, даже если исходные свидетельства (об опасности) соответствуют случаю, когда апостериорные вероятности всех гипотез (удостоверяющих нарастание опасности) должны увеличиваться.

Сравним вычисленную в соответствии с приведенным соотношением апостериорную условную вероятность $P(H_i /E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)$ с предварительно вычисленной по формуле Байеса апостериорной условной вероятностью $P(H_i /E_1)$ гипотезы H_i при одном свидетельстве E_1.

Соответственно здравому смыслу, отношение условных вероятностей $\dfrac{P(H_i/E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)}{P(H_i/E_1)}$ должно быть равным отношению использованных при их вычислении произведений $P(H_i)\,P(E_1/H_i)\,P(E_2/H_i \cdot E_1)\,P(E_3/H_i \cdot E_1 \cdot E_2)$ и $P(H_i)\,P(E_1/H_i)$ исходных статистических вероятностей, позволяющих “количественно сравнивать между собой события по степени их возможности” [1]. Однако ввиду того, что при вычислении $P(H_i/E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)$ и $P(H_i/E_1)$ используются исходные статистические вероятности, нормированные относительно разных групп комбинаций гипотез и свидетельств, соотношения, соответствующие здравому, смыслу оказываются искажёнными.

Если же, в соответствии с принципом сохранения соотношения вероятностей, прибегнуть к нормированию произведений исходных статистических вероятностей $P(H_i)\,P(E_1/H_i)\,P(E_2/H_i \cdot E_1)\,P(E_3/H_i \cdot E_1 \cdot E_2)$ и $P(H_i)\,P(E_1/H_i)$ относительно общей группы комбинаций гипотез и свидетельств, то соотношения для определения интегральных апостериорных условных вероятностей гипотез H_i (при учёте трёх свидетельств) следует записать в виде

$$P(H_i / E_1 \cdot E_2 \cdot E_2) = \frac{P(H_i)\, P(E_1/H_i)\, P(E_2/H_i \cdot E_1)\, P(E_3/H_i \cdot E_1 \cdot E_2)}{\sum_{k=1}^{n} \max[P(E_1/H_k)P(H_k), P(E_2/H_k)P(H_k), P(E_3/H_k)P(H_k)]},$$

$$P(H_i / E_1) = \frac{P(E_1/H_i)\, P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} \max[P(E_1/H_k)\, P(H_k), P(E_2/H_k)\, P(H_k), P(E_3/H_k)\, P(H_k)]},$$

при котором соотношения нормированных произведений вероятностей оказываются равными соотношениям произведений исходных статистических вероятностей. В общем знаменателе обеих формул указана максимально достижимая величина, обеспечивающая приведение суммы условных вероятностей гипотез H_i (i=1,…,n) с учётом различных возможных пересечений свидетельств к святому для теории вероятностей диапазону.

Из сказанного следует вывод, что для адекватного вычисления интегральных условных вероятностей требуется переход от мультипликативного учёта свидетельств (об опасности), приводящего к уменьшению интегральных значений при накапливании свидетельств, к аддитивному учёту, при котором интегральные значения вероятностей получаются не для пересечения, а для объединения свидетельств, и с поступлением каждого нового свидетельства (об увеличении опасности) возрастают.

Если перейти к аддитивному учёту вероятностей в общем случае неполной (в частном полной) группы независимых гипотез H_i, удостоверяющих нарастание опасности на основе накапливаемых независимых свидетельств, характеризуемых вероятностями $P(E_j)$, то интегральные вероятности гипотез с учётом признаков $б_{gi}$ их совместности (несовместности) и признаков $б_{gi}$ накапливания свидетельств естественно определить с помощью

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(б_{gi} H_i / в_j E_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} б_{gi} P(в_j E_j / H_i)\, P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(E_j / H_i)\, P(H_i)}.$$

В наиболее общем случае, когда вместо $P(H_i / E)$ используется математическое ожидание $P(б_i H_i / в_j E_j)$ и $P(б_i H_i / в_j \text{ не}E)$, получаем соотношение для интегральной вероятности, называемое далее формулой Долгова:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} б_i в_j [P(E)\, P(H_i / E_j) + (1 - P(E))\, P(H_i / \text{не}E_j)] =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} б_i в_j [P(E)\, P(E_j / H_i) P(H_i) + (1 - P(E))\, P(H_i / \text{не}E_j)\, P(H_i]}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \max[P(E)\, P(E_j / H_i) P(H_i) + (1 - P(E))\, P(H_i / \text{не}E_j)\, P(H_i]}.$$

Ввиду соблюдения принципа сохранения соотношения дифференциальных исходных вероятностей их вклад в интегральную условную вероятность “тем больше, чем более возможное событие” ([1], с. 16). В роли событий в данном случае выступают произведения гипотез и свидетельств.

Предлагаемая формула допускает возможность (с использованием дополнительного введения двоичных признаков) исключения недопустимых комбинаций гипотез и недопустимых комбинаций свидетельств, а также разделение тех и других допустимых комбинаций на учитываемые и не учитываемые.

Недопустимыми, в отличие от допустимых, признаются такие комбинации, которые в рамках вероятностного описания предметной области признаются реально невозможными.

Учитываемыми являются те комбинации, выбираемые из подмножества допустимых комбинаций, которые, в соответствии с физическим смыслом прикладной задачи, должны быть учтены при определении интегральной вероятности. Например, не учитываемыми, в отличие от учитываемых, при решении прикладной задачи, могут быть комбинации веществ, не представляющих опасность.

Разным комбинациям двоичных признаков ($0 \le \sum_{i=1}^{n} б_i \le n$) соответствуют различные комбинации попарно совместных гипотез.

При накапливании свидетельств или при сокращении их количества (например, в результате проверки достоверности) интегральная условная вероятность гипотез, определяемая в соответствии с предлагаемой формулой, соответственно возрастает вплоть до 1 или уменьшается (что не достигается при полной группе несовместных гипотез) вплоть до 0.

Теоретический и практический интерес может также представлять обобщённая формула Долгова

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} б_i в_j [P(E)\,P(H_i/E_j) + (1-P(E_j))\,P(H_i/неE_j)] =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} б_i (1-в_j)\,[\,P(H_i/неE_j(1-P(H_i)]}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \max\,[P(E_j/H_i)P(H_i), P(H_i/неE_j)\,P(H_i]} +$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} б_i в_j [P(E)\,P(E_j/H_i)P(H_i) + (1-P(E_j))\,P(H_i/неE_j)\,P(H_i]}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \max[P(E_j/H_i)\,P(H_i), P(H_i/неE_j)\,P(H_i]}.$$

В обобщённой формуле минимальное значение интегральной условной вероятности, в общем случае не равное нулю, при не поступлении того или иного свидетельства E_j об опасности представляется (за счёт дополнительно введенного выражения) априорной суммой условных вероятностей учитываемых гипотез при свидетельстве $неE_j$, то есть при отрицании свидетельства E_j.

Далее основное внимание будет уделено двум частным случаям формулы Долгова, представляющим наибольший интерес, когда все гипотезы являются либо (попарно) совместными, либо (попарно) несовместными.

Если гипотезы являются совместными, то для условной интегральной вероятности их единой комбинации с учётом того, что в этом случае $б_j = 1$ для j=1,…,m, формула Долгова принимает более простой вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} в_j [P(E)\,P(H_i/E_j) + (1-P(E_j))\,P(H_i/неE_j)] =$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} в_j[P(E)\,P(E_j/H_i)P(H_i)+(1-P(E_j))\,P(H_i/неE_j)\,P(H_i]}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\max[P(E)\,P(E_j/H_i)P(H_i)+(1-P(E_j))\,P(H_i/неE_j)\,P(H_i]}.$$

Для интегральной условной вероятности несовместных гипотез с учётом того, что этому случаю соответствует альтернативные комбинации, то есть комбинации, включающие более одной гипотезы, считаются к недопустимыми ($\sum_{j=1}^{m} б_j = 1$), формула Долгова записывается в виде, индивидуальном для каждой гипотезы:

$$\sum_{j=1}^{m} в_j[P(E)\,P(H_i/E_j)+(1-P(E_j))\,P(H_i/неE_j)]=$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{m} в_j[P(E)\,P(H_i/E_j)+(1-P(E_j))\,P(H_i/неE_j)]}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\max[P(E)\,P(E_j/H_i)P(H_i)+(1-P(E_j))\,P(H_i/неE_j)\,P(H_i]}.$$

В случае допустимого одного и только одного независимого достоверного свидетельства при $P(E_j)=1$ в числителе $P(E_j)\,P(H_i/E_j)$, а в знаменателе $\max[P(E_j)\,P(E_j/H_i)P(H_i)+(1-P(E_j))\,P(H_i/неE_j)\,P(H_i]=P(E_j/H_i)P(H_i)$ и исключается суммирование ($\sum_{j=1}^{m}$) по свидетельствам. Это частный случай, когда формула Долгова совпадает с формулой Байеса (как и в частном случае одного и только одного свидетельства $неE_j$, когда она совпадает с следствием формулы Байеса). Таким образом, приведенные формулы, построенные для определения интегральных условных вероятностей, следует рассматривать как теоретические обобщения формулы Байеса.

ВЫВОДЫ

1) Формула Байеса, в принципе, применима не только к полной группе несовместных гипотез, но и к неполной группе гипотез, которые могут быть как совместными, так и несовместными.

2) Предлагаемая формула интегральной условной вероятности является теоретическим обобщением формулы Байеса на случаи неполных групп, включающих комбинации как несовместных, так и совместных гипотез, при задаваемых вероятностях накапливаемых свидетельств, характеризующих степень доверия к ним.

3) Формула интегральной условной вероятности применима для произвольных комбинаций совместных и несовместных гипотез, при этом допускается возможность исключения недопустимых комбинаций гипотез и комбинаций свидетельств, а также разделения допустимых комбинаций (соответственно смыслу прикладной задачи) на учитываемые и не учитываемые.

4) Повышение адекватности вычисления уловных вероятностей гипотез, в том числе с использованием байесовских сетей доверия, осуществимо на основе перехода от мультипликативного учёта накапливаемых свидетельств к аддитивному учёту.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Издательский центр «Академия», М., 2003.
2. Змитрович А.И. Интеллектуальные информационные системы. НТООО «ТетраСистемс», Минск: 1997.
3. Нейлор К. Как построить свою экспертную систему: Пер. с англ. Энергоиздат, М., 1991.
4. Jensen F.V. Baycsian networks basics. – Tech. Rep. Aalborg University, Denmark, 1996.