

СИНТЕЗ ФРАКТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ RC-ЭРП С ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Мокляков В. А.

Казанский государственный технический университет им. А.Н.Туполева

Тел: 8(831)-439-68-74. E-mail: vitmokl@pochta.ru

Аннотация. Показана возможность создания интеграторов и дифференциаторов дробного порядка с помощью фрактальных RC-элементов с постоянной фазой.

Ключевые слова: оператор дробного дифференцирования, оператор дробного интегрирования, RC-элемент, фрактальная размерность.

В работе [1] показано, что некоторые объекты природы, в том числе и физические, имеют фрактальную природу и могут быть описаны с помощью фрактальной размерности.

Для математического описания объектов и процессов, имеющих фрактальную природу, стали использовать понятие динамической системы дробного порядка. При этом во временной области система описывается дифференциальными уравнениями в частных производных дробного порядка вида:

$$a_n D_t^{\beta_n} y(t) + \dots + a_k D_t^{\beta_k} y(t) + a_0 D_t^{\beta_0} y(t) = u(t),$$

где $D_t^{\beta_i}$ – обобщенный оператор дробного дифференцирования, выражение которого по Риману-Лиувиллю [2] имеет вид:

$$D_t^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta) dt^n} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(t)}{(t - \tau)^{\beta - n + 1}} dt, \quad n - 1 < \beta < n,$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция; a_k – постоянные коэффициенты уравнения; β_k – действительные числа; $k = 0, 1, \dots, n$.

Практическое использование данного подхода требует развития методов разработки фрактальных моделей реальных объектов и процессов, а также определения параметров фрактальных моделей.

Существует класс электрических цепей на RC-элементах с сосредоточенными параметрами (RC-ЭСП), входной импеданс которых в определенном диапазоне частот определяется соотношением:

$$Z(p) = F_0(p) p^{\alpha}, \quad (1)$$

где $p = \sigma + j\omega$ – комплексная частота, $0 < |\alpha| < 1$.

Таковыми же свойствами могут обладать и RC-линии, которые при определенных законах изменения погонных параметров по длине линии могут иметь дробностепенной характер комплексного импеданса в некотором диапазоне частот [2]. Такие элементы получили название – элементы с постоянной фазой (ЭПФ или CPE – constant phase element), так как аргумент (фаза) такого импеданса в некотором диапазоне частот равен $\varphi_c = -\alpha\pi/2$ и не зависит от частоты.

Оптимальными возможностями для синтеза входного импеданса с постоянством ФЧХ в заданном диапазоне частот имеют RC-ЭРП [3, 4] с фрактальными размерностями. Наиболее простыми, с точки зрения реализации, являются пленочные фрактальные RC-ЭРП (ФРС-ЭРП) на базе кривых Коха, Кантороваго стержня и ковра Серпинского.

Регулярный фрактал, предложенный Кантором, позволяет получать фрактальные множества с размерностью в интервале $0 < D < 1$ [3].

Одним из технологичных вариантов фрактальной геометрии, основанной на канторовом множестве, является сплошной канторовский стержень, в котором отрезки, получающиеся в разных поколениях, соединены между собой, длина каждого из которых составляет $1/r$ ($r < 2$) от длины исходного. Фрактальная размерность такого множества равна $D = \ln N / \ln(1/r)$.

Очевидно, что если реализовать на этом фрактальном RC-ЭРП операцию дробного интегрирования и дифференцирования, то, изменяя N и r , можно изменять порядок ДИД.

На основе ФРС-ЭРП можно создавать интеграторы и дифференциаторы дробного порядка, которые строятся по классическим схемам интеграторов и дифференциаторов целого порядка на операционных усилителях (ОУ), но конденсатор в них заменяется двухполюсным элементом, импеданс которого в определенном диапазоне частот имеет вид (1) [3].

Следует отметить, что, несмотря на большое число работ, в которых так или иначе отражаются вопросы реализации устройств ДИД, нет работ, посвященных проектированию ДИД на основе ОУ и RC-ЭРП, в которых были бы определены диапазоны рабочих частот, влияние разброса параметров ОУ и параметров фрактальных RC-ЭРП на точность выполнения операций, вопросы устойчивости и методы улучшения электрических и эксплуатационных характеристик устройств ДИД.

Литература

1. *Мандельброт Б.Б.* Фрактальная геометрия природы. Ижевск: Изд-во РХД, 2002. 315с.
2. *Нигматуллин Р.Ш.* Общее уравнение и электрический аналог электролитической ячейки со сферическим стационарным микроэлектродом // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. №6. С. 1383–1386.
3. *Гильмутдинов А.Х.* Резистивно-емкостные элементы с распределенными параметрами: анализ, синтез и применение. Казань: Изд-во Казан, гос. техн. ун-та, 2005. 350 с.
4. *Гильмутдинов А.Х.* Реализация операций дробного интегрирования и дифференцирования на основе резистивно-емкостных структур с распределенными параметрами //Тез. докл. XXXI науч.-техн. конф. Часть I (январь февраль 1997). Ульяновск: УлГГУ, 1997. С. 72.