

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КУРВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ирлянов Д.И.

ГОУВПО «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева», г. Саранск

Тел. +7(926)206-15-38 E-mail: dmitry@irlyanov.ru

Аннотация. В представленной работе описывается курвлет-преобразование – один из вариантов многомерной обработки сигналов и изображений, отличительной особенностью которого является анизотропность и возможность варьировать направление, что делает курвлеты особенно успешными при обработке изображений.

В работе представлены основные свойства курвлетов. Также в работе представлены примеры, при которых курвлет-преобразование наиболее успешно себя проявляет.

Основное внимание в работе уделено принципу «сжатых измерений» для восстановления изображений, также являющемуся сейчас довольно популярной темой исследований, который заключается в том, что изображение может быть восстановлено даже если исходные данные не удовлетворяют критерию Найквиста-Шеннона.

Ключевые слова: многомерная обработка, сигнал, изображение, курвлет-преобразование, сжатое изображение, восстановление изображения

Постановка задачи

В цифровой обработке сигналов и изображений вейвлеты стали незаменимым помощником. Их используют для анализа сердечных ритмов, очистке изображений от шумов, сжатии изображений и во многих других областях. Область применения вейвлетов действительно очень широка, однако и у них есть ограничения. В частности, в случае многомерных сигналов анизотропное преобразование может работать эффективнее. Это происходит в случае, если многомерный сигнал или изображение имеет участки, ограниченные непрерывными кривыми, что характерно для естественных изображений и фотографий. Такие случаи гораздо эффективнее обрабатываются курвлет-преобразованием.

Курвлет-преобразование представляет собой анизотропное многомерное преобразование, которое локализовано в окне, размеры которого подчиняются приближительной параболической зависимости “длина² ~ ширина” [1]. Курвлет-преобразование построено на семействе курвлет-функций или курвлетов, Примеры курвлетов различных масштабов можно найти на рисунке 1.

$$\Gamma_f(a, b, \theta) = \langle \gamma_{ab\theta}, f \rangle, \quad a < a_0, b \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, 2\pi)$$

Курвлеты зависят от трёх параметров: Масштабирующий параметр a , положение b и угол θ . На бесконечности курвлет убывает быстро: как $O(1/x^N) \quad \forall N$. Курвлет преобразование обратимо и по коэффициентам $c_{j,l,k} = \langle f, \gamma_{j,l,k} \rangle$ можно восстановить исходную функцию.

Курвлет-преобразование также можно дискретизовать [2] $a_j = 2^j, j=0, 1, 2, \dots, \theta_{j,l} = 2\pi l \cdot 2^{-j/2}, l=0, 1, \dots, 2^{\lfloor j/2 \rfloor} - 1, b_k^{(j,l)} = R_{\theta_{j,l}}(k_1 2^{-j}, k_2 2^{-j/2}), k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, тогда

$$f = \sum_{j,l,k} \langle f, \gamma_{j,l,k} \rangle \gamma_{j,l,k}, \quad \|f\|_{L_2}^2 = \sum_{j,l,k} |\langle f, \gamma_{j,l,k} \rangle|^2$$

Также мы можем произвести быстрое курвлет-преобразование, вычислив фурье-преобразование f , а затем вычислить скалярное произведение $\langle f, \gamma_{j,l,k} \rangle$, учитывая высокую компактность $\gamma_{j,l,k}$. В этом случае скорость вычисления курвлет-преобразования будет $O(n^2 \log n)$ циклов для массива координат размером $n \times n$. Кроме того, в этом случае курвлет-преобразование не теряет своих свойств.

Курвлеты отлично подходят для обработки изображений, так как в случае, если сингулярность представляет собой неразрывную линию они резко убывают в случае если они направлены перпендикулярно линии и убывают как \sqrt{a} если их направления совпадают. Курвлеты построены таким образом, что способны восстанавливать наиболее точное изо-

бражение, ограничиваясь всего несколькими коэффициентами и в этом случае они гораздо эффективнее вейвлетов [3]

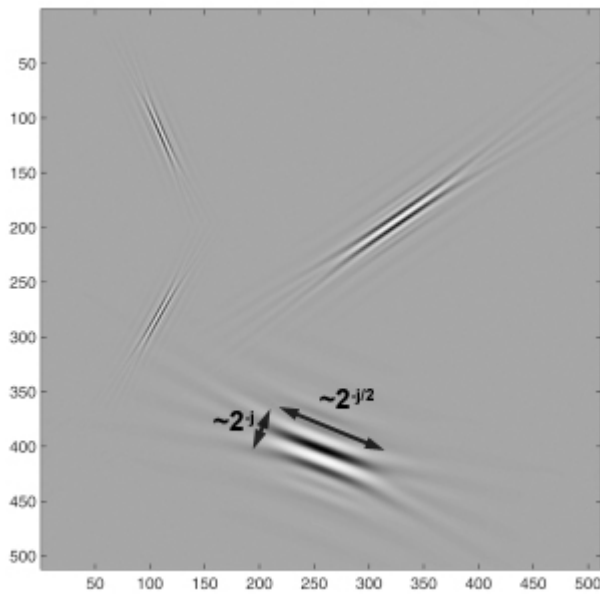


Рисунок 1. Примеры курвлетов

Курвлеты, например, могут быть успешно использованы для очистки изображения от шумов. При очистке используется частотный анализ, в котором мы полагаем, что высокочастотные элементы представляют собой шум, оставляя только низкочастотные элементы изображения, однако это размывает изображение. Курвлеты позволяют более точно определять границу областей в изображении, что предотвращает чрезмерное размытие этой границы.

Также курвлеты успешно используются в увеличении контрастности [4], выделении значимых областей изображения [5] при видеообработке [6] и выявлении характеристик поверхности [7] сейчас курвлеты также активно используются и для нахождения объектов (таких как лица) на изображении [8] И, несомненно, это далеко не все возможности их применения.

Наконец, стоит так же упомянуть новое применение курвлет-преобразования: “сжатые измерения” (Compressed Sensing) – парадигме, включающей в себя одновременно обработку изображения и его сжатие. Принцип сжатого измерения заключается в том, что изображение может быть точно восстановлено даже в случае если данных недостаточно согласно критерию Найквиста-Шеннона, согласно которому частота выборки должна быть по меньшей мере в два раза выше чем самая высокая частота сигнала. Получение данных с использованием сжатого измерения зависит больше от законов разреженности, чем от ширины диапазона частот. Также сжатые измерения могут оказать большое влияние на разработку измерительных приборов, используемых в областях в которых есть физические или финансовые ограничения на объем получаемых данных, например, обработка изображений полученных путём магнитного резонанса в медицине или дистанционное зондирование.

Математически мы имеем дело с проблемой восстановления сигнала x из небольшого количества измерений y . Пусть измерения хранятся в матрице A размера $K \times N$. Допустим, что $K \ll N$, то есть колонок в матрице намного больше чем строк. Мы можем описать измерения как $y = Ax + e$, где e – это шум и возможные ошибки измерения. Пусть K это число измерений, а N описывает измерения сигнала x . Из-за того, что в этом случае число неизвестных намного превышает число уравнений, решение невозможным. Однако в случае если x можно сжать курвлет-преобразованием T , например, $x = T^{-1}c$, где c это коэффициенты дискретного курвлет-преобразования $c = (c_j)$ то мы получаем следующее уравнение: $Ty = TAT^{-1}c + e = Ac + e$. Если матрица измерений A , подобно шуму, не имеет связей при курвлет-преобразовании, мы

можем восстановить последовательность коэффициентов преобразования c , используя минимизацию l_1 , основанную на ограничении разреженности [9],

$$\min_c \|T_y - Gc\|_{l_2} + \lambda \|c\|_{l_1}.$$

Для того, чтобы решить уравнение минимизации, мы можем использовать итеративное нахождение порогов при помощи курвлетов, основанное на методе Ландвебера

$$c_{p+1} = S_\sigma(c_p + G^T(T_y - Gc_p))$$

До того момента, пока $\|c_{p+1} - c_p\| < \varepsilon$, где S_σ – функция порогов.

Практически все естественные изображения могут быть сжаты путём курвлет-преобразования. Именно поэтому оно так интересно. Я уверен, что курвлеты ещё найдут множество применений в современной науке. Главная причина этому – особенности их построения соответствуют особенностям естественных изображений, а главный их недостаток – возросшая сложность (и, соответственно, время) вычислений со временем (согласно закону Мура, например) станет совсем незаметной.

Литература

1. Candes E. J., Donoho D. L. Continuous Curvelet Transform I: Discretization and Frames, 2003.
2. Candes E. J., Donoho D. L. Continuous Curvelet Transform I I: Resolution of the Wavefront Set, 2003. www.curvelet.org
3. Candes E. J., Guo F. New Multiscale Transforms, Minimum Total Variation Synthesis: Applications to Edge-Preserving Image Reconstruction, 2002. www.curvelet.org
4. Starck J. et al., «Gray and Color Image Contrast Enhancement by the Curvelet Transform» – IEEE Trans. Image Processing, vol. 12, no. 6, 2003, pp. 706–717.
5. Choi M. et al., «Fusion of Multispectral and Panchromatic Satellite Images Using the Curvelet Transform» – IEEE Geoscience Remote Sensing Letters, vol. 2, no. 2, 2005, pp. 136–140.
6. Ma J., Antoniadis A., Le Dimet F.-X., «Curvelets-Based Multiscale Detection and Tracking for Geophysical Fluids» - IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing, vol. 44, no. 12, 2006, pp. 3626–3637.
7. Ma J., «Curvelets for Surface Characterization» – Applied Physics Letters, vol. 90, no. 5, 2007, pp. 054109:1–3.
8. Dekel S., Sherman A.. «Curvelets: A Low-Level Framework for Computer Vision», preprint, GE Healthcare, 2008.
9. Candes E., Romberg J., Tao T., «Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements» – Comm. Pure Applied Mathematics, vol. 59, no. 8, 2005, pp. 1207–1233.